1 Verzamelingen en afbeeldingen

Notaties:
- $A = \{1, 2, 3\}$, $\emptyset$,
- $x \in A$, $y \notin A$,
- $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ en $B \subseteq A$,
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$,
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
- $\mathbb{Q} = p/q$, met $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$,
- $\mathbb{R}$: reële getallen,
- $\mathbb{C}$: complexe getallen,
- $\{x \in A : E(x)\}$: alle elementen van A met eigenschap E,
- begrensde intervallen:
  - open interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,
  - gesloten interval $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,
- onbegrensd interval: $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$,
- Cartesisch product $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ (verzameling geordende paren).

Operaties:
- complement $A^c = \Omega \backslash A = \{x \in \Omega : x \notin A\}$,
- vereniging $A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ of } x \in B\}$,
- doorsnede $A \cap B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ en } x \in B\}$,
- verschil $A \backslash B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ en } x \notin B\}$,
- A en B disjunct: $A \cap B = \emptyset$,
- gegeven: verzameling Ω, verzameling L,
  voor alle $\lambda \in L$: A_λ een deelverzameling van Ω:
  - $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \{x \in \Omega : \text{ voor alle } \lambda \in L \text{ geldt } x \in A_\lambda\}$,
  - $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda = \{x \in \Omega : \text{ er is een } \lambda \in L \text{ met } x \in A_\lambda\}$,
- Venn-diagrammen.

Een **functie** (afbeelding) van A (domein) naar B (codomein) is een tripel (A, B, f),
met f een deelverzameling van $A \times B$, met:
voor alle $a \in A$ bestaat precies één $b \in B$ zó dat $(a, b) \in f$;
notatie: $f : A \to B, a \mapsto f(a)$;
notatie: $(a, b) \in f$: $f(a) = b$, met a: origineel, b: beeld.

Gegeven: $f : A \to B$:
- f injectief: voor elke $b \in B$ ten hoogste één element $a \in A$ met $f(a) = b$
  (elk beeld maar één keer gebruikt),
- f surjectief: voor elke $b \in B$ ten minste één element $a \in A$ met $f(a) = b$
  (elk beeld wordt bereikt),
- f bijectief: f zowel injectief als surjectief,
  m.a.w. voor elke $b \in B$ precies één element $a \in A$ met $f(a) = b$;

notatie: beeld $f[A] = \{f(a) : a \in A\}$.

Gegeven: $f : A \to B$, $g : B \to C$;
samengestelde functie $(g \circ f)(a) = g(f(a))$;
associatief: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Identieke functie: $f : A \to A, a \mapsto a$.

Gegeven: $f : A \to B$ bijectief;
inverse functie $f^{-1} = g : B \to A : g(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$.

Gegeven: $f : A \to B, C \subseteq B$;
inverse beeld van C onder f: $f^{-1}(C) = \{a \in A : f(a) \in C\}$.

Verzamelingen A en B heten gelijkmachtig (equipotent) als bijectie $f : A \to B$ bestaat.

Gegeven: verzameling A:
- eindig: er bestaat een getal n zó dat $\{1, 2, 3, \ldots n\}$ en A gelijkmachtig,
  anders: oneindig,
- aftelbaar oneindig: A en $\mathbb{N}$ gelijkmachtig,
- aftelbaar: eindig of aftelbaar oneindig,
- overaftelbaar: niet aftelbaar.

Er geldt:
- natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ zelf zijn aftelbaar,
- gehele getallen $\mathbb{Z}$ zijn aftelbaar (definieer bijectie),
- rationale getallen $\mathbb{Q}$ zijn aftelbaar (definieer bijectie),
- reële getallen $\mathbb{R}$ zijn overaftelbaar
  (Cantor's diagonaal-argument op decimale ontwikkeling).

2 Getallen

Axioma's voor $\mathbb{N}$:
gegevens:
- **(a)** verzameling $\mathbb{N}$,
- **(b)** elementen 0 en 1 in $\mathbb{N}$,
- **(c)** optelling: afbeelding $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
- **(d)** vermenigvuldiging: afbeelding $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;

eigenschappen:
- **(N0)** elementen 0 en 1 zijn verschillend,
- **(N1)** element 0 is het kleinst;
  er is geen element $a \in \mathbb{N}$ waarvoor $1 + a = 0$,
- **(N2)** inductie: gegeven $A \subseteq \mathbb{N}$:
  als $0 \in A$ en $a \in A \Rightarrow 1 + a \in A$, dan $A = \mathbb{N}$
  (alle elementen vanaf 0 zitten in A),
- **(N3)** optelling is commutatief: voor alle $a, b \in \mathbb{N}$: $a + b = b + a$,
- **(N4)** optelling is associatief: voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$,
- **(N5)** 0 is neutraal voor optelling: voor alle $a \in \mathbb{N}$: $0 + a = a$,
- **(N6)** schrapwet voor optelling: voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$: $a + b = a + c \Rightarrow a = c$,
- **(N7)** vermenigvuldiging is commutatief: voor alle $a, b \in \mathbb{N}$: $a \cdot b = b \cdot a$,
- **(N8)** vermenigvuldiging is associatief: voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- **(N9)** 1 is neutraal voor vermenigvuldiging: voor alle $a \in \mathbb{N}$: $1 \cdot a = a$,
- **(N10)** schrapwet voor vermenigvuldiging:
  voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$, met $a \neq 0$: $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow a = c$,
- **(N11)** distributieve eigenschap: voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Ordening $\leq$ op $\mathbb{N}$:
gegeven $a, b \in \mathbb{N}$: $a \leq b$ als een $c \in \mathbb{N}$ bestaat met $b = a + c$;
$a < b$ als $a \leq b$ en $a \neq b$;
$a \geq b$ als $b \leq a$.

Eigenschappen van $\leq$:
- **(N12)** voor alle $a, b \in \mathbb{N}$: $((a \leq b) \wedge (b \leq a)) \Rightarrow a = b$,
- **(N13)** voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$: $((a \leq b) \wedge (b \leq c)) \Rightarrow a \leq c$,
- **(N14)** voor alle $a, b \in \mathbb{N}$: $(a \leq b) \vee (b \leq a)$,
- **(N15)** voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$: $a \leq b \Rightarrow ((a + c) \leq (b + c))$,
- **(N16)** voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$: $(a \leq b) \Rightarrow (ac \leq bc)$.

Axioma's voor $\mathbb{Z}$:
gegevens:
(a) verzameling $\mathbb{Z}$,
(b) elementen 0 en 1 in $\mathbb{Z}$,
(c) optelling: afbeelding $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,
(d) vermenigvuldiging: afbeelding $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$;
eigenschappen:
(Z0) optelling is commutatief: voor alle $a, b \in \mathbb{Z}$: $a + b = b + a$,
(Z1) optelling is associatief: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$,
(Z2) 0 is neutraal voor optelling: voor alle $a \in \mathbb{Z}$: $0 + a = a$,
(Z3) additieve inversen (onderscheid t.o.v. $\mathbb{N}$):
voor iedere $a \in \mathbb{Z}$ bestaat een $b \in \mathbb{Z}$ met $a + b = 0$;
notatie: $b = -a$,
(Z4) vermenigvuldiging is commutatief: voor alle $a, b \in \mathbb{Z}$: $a \cdot b = b \cdot a$,
(Z5) vermenigvuldiging is associatief: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
(Z6) 1 is neutraal voor vermenigvuldiging: voor alle $a \in \mathbb{Z}$: $1 \cdot a = a$,
(Z7) distributieve eigenschap: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
(Z8) als voor $A \subseteq \mathbb{Z}$ geldt: $0 \in A, 1 \in A$ en
$(a, b \in A) \Rightarrow ((-a \in A) \wedge (a + b \in A) \wedge (ab \in A))$,
dan $A = \mathbb{Z}$,
(Z9) verzameling $\mathbb{Z}$ is niet eindig.
Er geldt: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

Verschil: $a - b = a + (-b)$;
aftrekken: afbeelding $- : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (a, b) \mapsto a - b$.

Ordening $\leq$ op $\mathbb{Z}$:
gegeven $a, b \in \mathbb{Z}$: $a \leq b$ als een $c \in \mathbb{N}$ bestaat met $b = a + c$;
$a < b$ als $a \leq b$ en $a \neq b$;
$a \geq b$ als $b \leq a$.

Axioma's voor $\mathbb{Q}$:
gegevens:
(a) verzameling $\mathbb{Q}$,
(b) elementen 0 en 1 in $\mathbb{Q}$,
(c) optelling: afbeelding $+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$,
(d) vermenigvuldiging: afbeelding $\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$;

eigenschappen:
(Q0) optelling is commutatief: voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$: $a + b = b + a$,
(Q1) optelling is associatief: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$,
(Q2) 0 is neutraal voor optelling: voor alle $a \in \mathbb{Q}$: $0 + a = a$,
(Q3) additieve inversen: voor iedere $a \in \mathbb{Q}$ bestaat een $b \in \mathbb{Q}$ met $a + b = 0$;
notatie: $b = -a$,
(Q4) vermenigvuldiging is commutatief: voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$: $a \cdot b = b \cdot a$,
(Q5) vermenigvuldiging is associatief: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
(Q6) 1 is neutraal voor vermenigvuldiging: voor alle $a \in \mathbb{Q}$: $1 \cdot a = a$,
(Q7) multiplicatieve inversen (onderscheid t.o.v. $\mathbb{Z}$):
voor iedere $a \in \mathbb{Q}$ met $a \neq 0$ bestaat een $b \in \mathbb{Q}$ met $a \cdot b = 1$;
notatie: $b = 1/a$,
(Q8) distributieve eigenschap: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
(Q9) als voor $A \subseteq \mathbb{Q}$ geldt: $0 \in A, 1 \in A$,
$(a \in A) \Rightarrow (-a \in A), (0 \neq a \in A) \Rightarrow (1/a \in A)$,
$(a, b \in A) \Rightarrow ((a + b \in A) \wedge (ab \in A))$,
dan $A = \mathbb{Q}$,
(Q10) verzameling $\mathbb{Q}$ is niet eindig.
Er geldt: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.
Elk element van $\mathbb{Q}$ is van de vorm a/b, met $a, b \in \mathbb{Z}$ en $b \neq 0$.

Delen: afbeelding $/ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, (a, b) \mapsto a \cdot b^{-1}$, met $b \neq 0$;
notatie: $a \cdot b^{-1} = a/b$.

Ordening $\leq$ op $\mathbb{Q}$:
gegeven $a, b \in \mathbb{Q}$: $a \leq b$ als $c, d \in \mathbb{N}$ bestaan, met $d \neq 0$, zó dat $b = a + c/d$;
$a < b$ als $a \leq b$ en $a \neq b$;
$a \geq b$ als $b \leq a$.

Volledige inductie:
bewijs volgens volledige inductie: bewijstechniek voor stellingen over natuurlijke getallen, gebaseerd op Principe van Volledige Inductie.
1. check de bewering voor $n = 0$,
2. inductieveronderstelling: neem aan dat de bewering waar voor n,
3. bewijs op basis daarvan de bewering voor $n + 1$.

Gegeven: verzameling A;
een **relatie** op A is een deelverzameling $\sim$ van het Cartesisch product $A \times A$;
twee elementen a en b uit A zijn in relatie $\sim$ als $(a, b) \in \sim$;
notatie: $a \sim b$.

Equivalentie-relatie: een relatie $\sim$ op verzameling A is een equivalentie-relatie als:
(i) reflexief: voor alle $x \in A$: $x \sim x$,
(ii) symmetrisch: voor alle $x, y \in A$: $(x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$,
(iii) transitief: voor alle $x, y, z \in A$: $((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \Rightarrow (x \sim z)$.
Een equivalentie-relatie op een verzameling verdeelt (partitioneert) die in disjuncte deelverzamelingen (**equivalentieklassen**).

Gegeven: verzameling A en equivalantie-relatie $\sim$ op A:
afbeelding $q : A \to B$ is een **quotiënt-afbeelding** voor $\sim$ als:
1. q is surjectief,
2. voor alle $x, y \in A$: $x \sim y \Leftrightarrow q(x) = q(y)$.
(betekenis: een afbeelding naar identificaties voor equivalentie-klassen)

Axioma's voor $\mathbb{R}$:
gegevens:
(a) verzameling $\mathbb{R}$,
(b) twee verschillende elementen 0 en 1 in $\mathbb{R}$,
(c) optelling: afbeelding $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
(d) vermenigvuldiging: afbeelding $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
(e) ordening: relatie $>$ op $\mathbb{R}$;
eigenschappen:
(R0) optelling is commutatief: voor alle $a, b \in \mathbb{R}$: $a + b = b + a$,
(R1) optelling is associatief: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$,
(R2) 0 is neutraal voor optelling: voor alle $a \in \mathbb{R}$: $0 + a = a$,
(R3) additieve inversen: voor iedere $a \in \mathbb{R}$ bestaat een $b \in \mathbb{R}$ met $a + b = 0$;
notatie: $b = -a$,
(R4) vermenigvuldiging is commutatief: voor alle $a, b \in \mathbb{R}$: $a \cdot b = b \cdot a$,
(R5) vermenigvuldiging is associatief: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
(R6) 1 is neutraal voor vermenigvuldiging: voor alle $a \in \mathbb{R}$: $1 \cdot a = a$,
(R7) multiplicatieve inversen:
voor iedere $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$ bestaat een $b \in \mathbb{R}$ met $a \cdot b = 1$;
notatie: $b = 1/a$,
(R8) distributieve eigenschap: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
(R9) voor alle $a, b \in \mathbb{R}$: $a = b$, $a > b$ of $b > a$,
(R10) voor alle $a, b \in \mathbb{R}$: als $a > 0$ en $b > 0$, dan $a + b > 0$ en $a \cdot b > 0$,
(R11) voor alle $a, b \in \mathbb{R}$: $a > b$ desda. $a - b > 0$,
(R12) Archimedische eigenschap: voor iedere $x \in \mathbb{R}$: er is een $n \in \mathbb{N}$ zó dat $x < n$.

(R13) Fundamentele eigenschap van $\mathbb{R}$:
iedere niet-lege, naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ heeft een unieke kleinste bovengrens (supremum),
iedere niet-lege, naar beneden begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ heeft een unieke grootste ondergrens (infimum)
(onderscheid t.o.v. $\mathbb{Q}$: $\mathbb{R}$ bevat geen gaten).

Verschil: $a - b = a + (-b)$.
Quotiënt: voor $b \neq 0$: $a/b = a \cdot b^{-1}$.

Notaties:
als $a > 0$ heet a positief,
$\mathbb{R}_{>0}$: verzameling van positieve reële getallen,
relatie $<$ op $\mathbb{R}$: $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | b > a\}$,
dus voor $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b \Leftrightarrow b > a$,
als $a < 0$ heet a negatief,
$a \geq b$: a groter of gelijk aan b.

Een deelverzameling V van $\mathbb{R}$:
(i) naar boven begrensd:
er bestaat een (bovengrens) $x \in \mathbb{R}$ zó dat $v \leq x$ voor alle $v \in V$,
(ii) naar beneden begrensd:
er bestaat een (ondergrens) $x \in \mathbb{R}$ zó dat $v \geq x$ voor alle $v \in V$,
(iii) **begrensd**: als V zowel naar boven als naar beneden begrensd.
Let op: een verzameling hoeft geen boven/ondergrens te hebben.

Een deelverzameling V van $\mathbb{R}$:
(i) **supremum** x van V ($\sup V$): kleinste bovengrens van V, d.w.z.
- x is bovengrens voor V,
- als y bovengrens voor V, dan $y \geq x$,

(ii) **infimum** x van V ($\inf V$): grootste ondergrens van V, d.w.z.
- x is ondergrens voor V,
- als y ondergrens voor V, dan $y \leq x$.

Gegeven: niet-lege, deelverzameling V van $\mathbb{R}$:
(i) $v \in V$ **maximum** voor V ($\max V$) als $v \geq u$ voor alle $u \in V$,
(ii) $v \in V$ **minimum** voor V ($\min V$) als $v \leq u$ voor alle $u \in V$.

Gegeven: niet-lege, deelverzameling V van $\mathbb{R}$, dan equivalent:
(i) V heeft een maximum,
(ii) V naar boven begrensd en $\sup V \in V$,
(dan geldt: $\max V = \sup V$)
en:
(i) V heeft een minimum,
(ii) V naar beneden begrensd en $\inf V \in V$.
(dan geldt: $\min V = \inf V$)

Let op: verzameling V mag niet leeg zijn.

3 Ongelijkheden

Driehoeksongelijkheid: voor alle $x, y \in \mathbb{R}$: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

4 Reële rijen

Gegeven verzameling A: een **rij** in A is een functie $a : \mathbb{N} \to A$;
notaties: termen $a(n) : a_n$, afbeelding $a : \mathbb{N} \to A : (a_n)_{n\geq 0}$ of $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
reële rij: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(A = \mathbb{R})$;
indexverzameling: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Deelrij $(b_k)_{k\geq 0}$ van rij $(a_n)_{n\geq 0}$:
als een strikt stijgende rij natuurlijke getallen $(n_k)_{k\geq 0}$ bestaat
zó dat voor alle $k \in \mathbb{N}$: $b_k = a_{n_k}$ (een index op een index).

Een reële rij $(a_n)_{n\geq 0}$ heet **convergent** als een (limiet) $a \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat:
voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$: $|a_n - a| < \varepsilon$;
(willekeurig kleine band rond "eindpunt")
notatie: limiet $\lim_{n\to\infty} a_n = a$;
een rij die niet convergent is, heet **divergent**.

Een reële rij $(x_n)_{n\geq 0}$ divergeert naar oneindig
als voor iedere $\xi \in \mathbb{R}$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat voor alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$: $x_n \geq \xi$;
notatie: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$;
analoog voor divergentie naar $-\infty$.

Insluitstelling ("sandwich-stelling"):
gegeven $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ en $(z_n)_{n\geq 0}$ reële rijen met $x_n \leq y_n \leq z_n$ voor alle $n \geq 0$;
als rijen $(x_n)_{n\geq 0}$ en $(z_n)_{n\geq 0}$ beide convergent met limiet a,
dan convergeert rij $(y_n)_{n\geq 0}$ ook met limiet a.

Rekenregels:
gegeven: reële rijen $(x_n)_{n\geq 0}$ en $(y_n)_{n\geq 0}$ convergent
met respectievelijk $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ en $\lim_{n\to\infty} y_n = y$:
(i) voor iedere $\alpha \in \mathbb{R}$: rij $(\alpha x_n)_{n\geq 0}$ convergent met limiet $\lim_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha x$,
(ii) somrij $(x_n + y_n)_{n\geq 0}$ convergent met limiet $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$,
(iii) productrij $(x_n \cdot y_n)_{n\geq 0}$ convergent met limiet $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$,
(iv) neem aan $x \neq 0$; er is een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N$: $x_n \neq 0$;
(alleen de staart moet ongelijk 0 zijn)
rij $(1/x_n)_{n\geq 0}$ convergent met limiet $\lim_{n\to\infty} 1/x_n = 1/x$

(hulpstelling) Gegeven: reële rij $(x_n)_{n\geq 0}$:
begrensd als een getal $G \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $|x_n| \leq G$.

Gegeven: reële rij $(x_n)_{n\geq 0}$:
- **stijgend**: als $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots$,
- strikt stijgend: als $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$;

analoog voor dalende en strikt dalende rijen.

Monotone convergentiestelling:
iedere stijgende en naar boven begrensde reële rij convergeert naar zijn supremum.

Gegeven: reële rij $(x_n)_{n\geq 0}$:
Cauchy-rij: als voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat
zó dat voor alle $n \geq N$: $|x_n - x_N| < \varepsilon$.
(betekenis: variatie van x blijft in een steeds kleiner wordende band)

Volledigheidsstelling: iedere Cauchy-rij is convergent, en andersom.
(koppelt band t.o.v. punt X_N aan convergentie t.o.v. limiet)

(hulpstelling) Iedere Cauchy-rij is begrensd.

Bolzano-Weierstrass: iedere begrensde reële rij heeft een convergente deelrij.

5 Continuïteit

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, punt $c \in D$:
functie f **continu** in c als voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ een $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat
zó dat voor alle $x \in D$ met $|x - c| < \delta$: $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$;

functie f heet continu als deze continu is in ieder punt van D;

functie f links continu in c als voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ een $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat
zó dat voor alle $x \in D$ met $c - \delta < x \leq c$: $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$;

functie f rechts continu in c als voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ een $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat
zó dat voor alle $x \in D$ met $c < x \leq c + \delta$: $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Rekenregels:
gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$, functies $f : D \to \mathbb{R}$ en $g : D \to \mathbb{R}$, beide continu in punt $c \in D$:
(i) voor iedere $\alpha \in \mathbb{R}$: functie $\alpha f : D \to \mathbb{R}$ continu in punt c,
(ii) somfunctie $f + g : D \to \mathbb{R}$ continu in punt c,
(iii) productfunctie $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ continu in punt c,
(iv) neem aan dat $f(x) \neq 0$ voor alle $x \in D$;
reciproke functie $1/f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/f(x)$ continu in punt c;

gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, functies $f : D \to \mathbb{R}$ en $g : E \to \mathbb{R}$, met $f[D] \subseteq E$,
f continu in punt $c \in D$:
(v) samengestelde functie $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ continu in punt c.

Let op: voor continuïteit hoeft alleen te gelden: $c \in D \subseteq \mathbb{R}$.

(hulpstelling) Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, punt $c \in D$:
equivalent:
(i) functie f continu in punt c,
(ii) voor iedere rij $(x_n)_{n \geq 0}$ in D met $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ geldt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$:
c is een **verdichtingspunt** van D als voor iedere $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ een $x \in D \setminus \{c\}$ bestaat zó dat $|x - c| < \delta$.
(betekenis: punt c ligt ingebed in verzameling D of er oneindig dicht tegenaan (open interval))

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ verdichtingspunt van D:
$L \in \mathbb{R}$ is de **limiet** van f in c als voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ een $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat
zó dat voor alle $x \in D$ met $0 < |x - c| < \delta$: $|f(x) - L| < \varepsilon$;
notatie: $\lim_{x \to c} f(x) = L$;

gegeven: $c \in \mathbb{R}$ verdichtingspunt van $\{x \in D : x < c\}$:
$L \in \mathbb{R}$ is de linker limiet van f in c als voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ een $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat
zó dat voor alle $x \in D$ met $c - \delta < x < c$: $|f(x) - L| < \varepsilon$;
notatie: $\lim_{x \to c-} f(x) = L$;

gegeven: $c \in \mathbb{R}$ verdichtingspunt van $\{x \in D : x > c\}$:
$L \in \mathbb{R}$ is de rechter limiet van f in c als voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ een $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat
zó dat voor alle $x \in D$ met $c < x < c + \delta$: $|f(x) - L| < \varepsilon$;
notatie: $\lim_{x \to c+} f(x) = L$.

Gegeven: $c \in \mathbb{D}$ verdichtingspunt van D:
functie $f : D \to \mathbb{R}$ is continu in punt c desda. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, c verdichtingspunt van D:
voor $L \in \mathbb{R}$ zijn deze uitspraken equivalent:
(i) $\lim_{x \to c} f(x) = L$,
(ii) voor iedere rij $(x_n)_{n \geq 0}$ in $D \setminus \{c\}$ met $\lim_{n \to \infty} x_n = c$: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Rekenregels:
gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$, functies $f : D \to \mathbb{R}$ en $g : D \to \mathbb{R}$,
punt $a \in \mathbb{R}$ een verdichtingspunt van D:
(a) als $\lim_{x \to a} f(x) = L$ en $\lim_{x \to a} g(x) = M$, dan $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = L + M$,
(b) als $\lim_{x \to a} f(x) = L$ en $\lim_{x \to a} g(x) = M$, dan $\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$,
(c) neem aan dat $g(x) \neq 0$ voor alle $x \in D$;
als $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $\lim_{x \to a} g(x) = M$ en $M \neq 0$,
dan $\lim_{x \to a}(f(x)/g(x)) = L/M$,
(d) voor iedere $\alpha \in \mathbb{R}$: als $\lim_{x \to a} f(x) = L$, dan $\lim_{x \to a}(\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot L$.

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$:
functie $f : D \to \mathbb{R}$ is **uniform continu** als voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ een $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat zó dat voor alle $x, y \in D$ met $|x - y| < \delta$ geldt: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$;
(betekenis: continuïteit onafhankelijk van punt c;
of: richtingscoëfficient van f is begrensd)
dus elke uniform continue functie is continu.
Let op: geldt voor hele functie.

Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$:
iedere continue functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is uniform continu.

Nulpuntstelling:
gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$:
als $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu en $f(a) < 0 < f(b)$,
dan is er een $\xi \in (a, b)$ waarvoor geldt: $f(\xi) = 0$.
(betekenis: je moet door 0 om van $f(a)$ naar $f(b)$ te gaan)

Tussenwaardestelling:
gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$:
als $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu en $f(a) < f(b)$,
dan is er voor iedere $C \in [f(a), f(b)]$ een $c \in [a, b]$ waarvoor geldt: $f(c) = C$.
(betekenis: veralgemenisering van Nulpuntstelling)

Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$:
als $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu,
dan heeft de verzameling $f[[a, b]] = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ een maximum en een minmum.

Let op: voor de limiet hoeft c alleen verdichtingspunt te zijn van $D \subseteq \mathbb{R}$.

6 Afgeleiden

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$:
verzameling D heet **open** in $\mathbb{R}$
als voor iedere $x \in D$ een $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat zó dat $(x - \delta, x + \delta) \subseteq D$.

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$ open, $f : D \to \mathbb{R}$, $c \in D$:
functie f heet **differentieerbaar** in c als de limiet $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ bestaat;
deze limiet heet de afgeleide van f in c; notatie: $f'(c)$;
functie f heet differentieerbaar als f differentieerbaar in ieder punt van D.

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$ open, $c \in D$:
als $f : D \to \mathbb{R}$ differentieerbaar in c, dan is f continu in c.

(hulpstelling) **Linearisering**:
gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$ open, $f : D \to \mathbb{R}$, $c \in D$, $L \in \mathbb{R}$:
equivalente uitspraken:
(i) f is differentieerbaar in c en $f'(c) = L$,
(ii) er bestaat een functie $\tilde{F} : D \to \mathbb{R}$, continu in c,
zó dat $\tilde{F}(c) = 0$ en voor elke $x \in D$ geldt: $f(x) = f(c) + L \cdot (x - c) + (x - c) \cdot \tilde{F}(x)$.
(betekenis: $\tilde{F}(x)$ geeft een maat voor de fout t.o.v. punt c)
(betekenis: rond het punt c is $f(x)$ bij benadering gelijk aan zijn linearisering)

Kettingregel:
gegeven: D_1, D_2 open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$,
$f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$, $f[D_1] \subseteq D_2$,
$c \in D_1$, f differentieerbaar in c, g differentieerbaar in $f(c)$:
dan is ook samengestelde functie $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ differentieerbaar in c,
en geldt: $(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$.

Rekenregels:
gegeven: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$, $\alpha \in \mathbb{R}$:
als f en g differentieerbaar in c, dan:
(i) αf differentieerbaar in c met afgeleide $(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c)$,
(ii) $f + g$ differentieerbaar in c met afgeleide $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$,
(iii) $f \cdot g$ differentieerbaar in c met afgeleide $(f \cdot g)'(c) = f(c) \cdot g'(c) + f'(c) \cdot g(c)$,
(iv) als $g(x) \neq 0$ voor alle $x \in (a, b)$:
$1/g$ differentieerbaar in c met afgeleide $(1/g)'(c) = -g'(c)/(g(c))^2$.

Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$:
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differentieerbaar:
functie f is stijgend desda. $f'(x) \geq 0$ voor alle $x \in (a, b)$.
(betekenis: **richtingscoëfficiënt**)

(hulpstelling) Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$,
f neemt een minimum of maximum aan in punt $c \in (a, b)$:
als f differentieerbaar in c, dan geldt: $f'(c) = 0$.
(betekenis: richtingscoëfficient is nul in minima en maxima)

Stelling van Rolle:
gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$,
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue functie differentieerbaar op (a, b):
als $f(a) = f(b) = 0$, dan bestaat een $\xi \in (a, b)$ met $f'(\xi) = 0$.

Middelwaardestelling:
gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$,
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue functie differentieerbaar op (a, b):
er bestaat een $\xi \in (a, b)$ waarvoor geldt: $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
(betekenis: veralgemenisering van Stelling van Rolle)

Let op: voor differentieerbaarheid moet gelden: $c \in D \subseteq \mathbb{R}$, met D open.

7 Riemann-integraal

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$:
functie $f : D \to \mathbb{R}$ heet **begrensd**
als een $G \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat $|f(x)| < G$ voor alle $x \in D$.

Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$:
een **partitie** van interval $[a, b]$ is een eindige verzameling $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ punten uit $[a, b]$ met $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$;
maaswijdte van P: $\mu(P) = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \ldots, n\}$;
(betekenis: een partitie verdeelt een interval in deelintervallen)
partitie P_2 is een verfijning van partitie P_1 als $P_2 \subseteq P_1$;
partitie $P_1 \cup P_2$ is een verfijning van zowel P_1 als P_2.

Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$,
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie,
$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ een partitie van $[a, b]$:
definieer voor $i = 1, 2, \ldots, n$:
- $M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$,
- $m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$,
- $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$.

Bovensom: $U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i$;
ondersom: $L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i$.

Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$,
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie:
bovenintegraal van f over $[a, b]$: $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{U(P, f) : P \text{ is een partitie van } [a, b]\}$;
onderintegraal van f over $[a, b]$: $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{L(P, f) : P \text{ is een partitie van } [a, b]\}$.

Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$,
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie:
f heet **Riemann-integreerbaar** over $[a, b]$
als bovenintegraal $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ en onderintegraal $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ van f aan elkaar gelijk zijn:
hun gemeenschappelijke waarde heet dan de Riemann-integraal van f over $[a, b]$: $\int_a^b f(x)dx$.

Afspraken:

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$,
- $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Elke continue reële functie op een gesloten en begrensd interval is Riemann-integreerbaar.
(volgt uit constructie: begrensd in x- en y-richting)

Functie $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ differentieerbaar als differentieerbaar in ieder punt van [a, b];
F continu differentieerbaar als F differentieerbaar en afgeleide F' continu op $[a, b]$.

Hoofdstelling van de Integraalrekening:
gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$,
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu (dus begrensd):
functie $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd als $F(x) = \int_a^x f(t)dt$;
dan F continu differentieerbaar en voor alle $x \in [a, b]$ geldt: $F'(x) = f(x)$.

Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$,
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu op $[a, b]$ en differentieerbaar op (a, b) met $F'(x) = f(x)$ voor alle $x \in (a, b)$;
dan geldt: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Let op: voor Riemann-integreerbaarheid moet f begrensd zijn.